(Maria Cantoni, gennaio 2013) **Un itinerario particolare verso i teoremi di Euclide**

Inviai al Bollettino di Cabrinews**, e venne pubblicato sul N. 37 dell'ottobre 2003, un articolo di approfondimento relativamente ad un loro problema: "Flatlandia: un invito al dialogo attraverso il problema di ottobre 2002". Il problema era:

> *In un qualunque triangolo ABC, costruire sul lato AB un punto P in modo che i triangoli PCA e PCB abbiano ugual perimetro. Giustificare la costruzione. Si chiede:*
> *a) È unico il punto trovato?*
> *b) Ripetendo la costruzione sugli altri due lati di ABC si può osservare un fatto "notevole", di cui non si chiede la dimostrazione. Qual è?*

Inizialmente il problema non mi era parso di particolare interesse perché apparentemente di facile soluzione soprattutto con l'uso grafico di Cabri-Géomètre, ma l'ultima domanda mi portò a interessanti riflessioni, che riassumo nel seguito.

1. *Premessa.*
Alcune riflessioni sul problema di Flatlandia, Ottobre 2002 (e più in generale su molti altri precedenti e seguenti), mi hanno portata a considerare gli "invii mensili", forse anche perché imprevedibili come contenuto, molto stimolanti per le riflessioni culturali e didattiche a cui mi hanno condotta. Mi sono domandata allora se, al di là della risoluzione richiesta agli studenti, essi sarebbero potuti divenire **filo conduttore** di scambio di opinioni e di ricerca per noi insegnanti, prendendo anche in considerazione i modi, certamente diversi, con cui gli studenti richiedono il coinvolgimento del docente.
2. *Le riflessioni*.
Mi sono posta a risolvere il problema di Flatlandia con curiosità, perché mi è capitato in altri casi che lo svolgimento mi abbia dato suggerimenti didattici originali vuoi per l'argomento trattato, vuoi per lo strumento Cabri usato per il lavoro grafico. Senza ribadirlo altrove, ritengo che la flessibilità dello strumento usato abbia determinato gli spunti didattici, del tutto teorici per ora, che il problema mi ha suggerito.

Tralascio il lavoro risolutivo relativo ai primi due punti che invitano gli studenti, della scuola media inferiore soprattutto, a meditare proficuamente sulla situazione (anche se molto interessanti, credo, sarebbero le cose da dire a questo proposito). Per quanto riguarda il terzo punto, il disegno suggerisce immediatamente l'esistenza del punto intersezione dei tre segmenti in gioco (vedere fig. 1). La dimostrazione, non richiesta, è conseguenza del classico Teorema di Ceva.

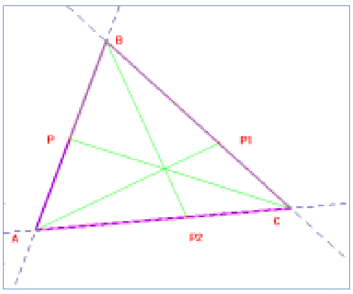

Figura 1

Lasciando il problema iniziale e l'articolo che mi porterebbe lontano, ad altre suggestioni di percorso, vorrei però riportare qui un discorso sui triangoli ed in particolare sui triangoli rettangoli che tante volte in classe ci ha portati, già alla scuola media, ad affrontare i teoremi di Euclide con grande spontaneità. Oggi i teoremi di Euclide sono lasciati definitivamente al biennio delle superiori. Mi preme evidenziare allora come, all'interno di un lavoro di riflessione intorno ad un'elaborazione grafica di triangoli rettangoli, poco per volta possa nascere una presa di coscienza di tutto ciò che sta entrando in gioco: ci sono dei triangoli simili che stiamo manipolando e per essi sappiamo anche usare le proporzioni. "Rileggiamo" il tutto con un altro linguaggio ed arriviamo spontaneamente ai teoremi di Euclide!

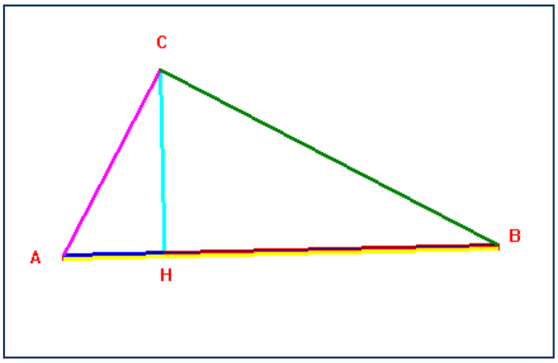

Figura 2

In figura 2 abbiamo un triangolo rettangolo con in evidenza l'altezza relativa all'ipotenusa. Conosciuta una coppia di segmenti tra quelli evidenziati (AC, AB, BC, CH, AH, HB), essa dà sufficiente informazione per disegnare, a meno di isometrie, il corrispondente triangolo rettangolo. Tralasciamo per un momento le coppie di segmenti non consecutivi AC e HB, CB e AH, (figura 3), che sono particolarmente interessanti, ma forse più complesse delle altre per la nostra riflessione immediata.

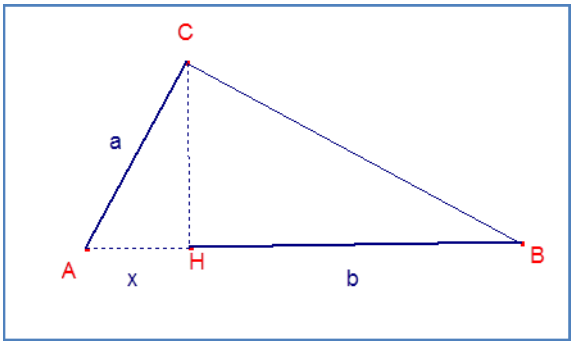

Figura 3. Il problema del triangolo rettangolo con "coppie non consecutive"

Vedremo più avanti come, prendendo lo spunto dalla soluzione grafica di quest'ultimo problema, si possa arrivare ad ampliare la "ricerca" in campi apparentemente diversi. Ecco ancora una volta un'occasione di apertura didattica imprevedibile. Ritornando alle altre coppie, se accanto alla costruzione grafica (che di fatto necessita comunque di un utile e non banale richiamo alle conoscenze e di un piacevole uso del software) si analizza anche la possibilità di ricavare la misura di tutti gli altri segmenti evidenziati (sempre a partire dalla coppia usata per la costruzione), si nota che l'uso del Teorema di Pitagora non è sufficiente per risolvere il problema.

Partendo dalla considerazione che la risoluzione di un problema deve venire dalle informazioni che si posseggono, si può certamente porsi una domanda: c'è qualche relazione che si potrebbe considerare oltre al teorema di Pitagora e che non sia stata osservata? Analizzando meglio si scopre che, accanto al triangolo iniziale, vi sono altri due triangoli simili al precedente. Se si esprimono le relazioni che intercorrono tra i lati corrispondenti dei suddetti triangoli si trovano, tra le altre, due proporzioni interessanti che portano direttamente a "scoprire" i Teoremi di Euclide. Questo lavoro ha sempre stupito, ma anche "divertito" gli allievi, che ancora una volta hanno constatato che la matematica è "diversa" dalle regole da studiare, dai teoremi che non si capisce perché debbano essere posti.

Possiamo ritornare adesso al problema, rimasto in sospeso, della "costruzione del triangolo rettangolo" data una delle due coppie non consecutive AC e HB, CB e AH, per vedere quanto ci possa portare lontano; problema che anche il "Bollettino" nello stesso numero dell'ottobre 2003 propone come "proposta di lavoro" (figura 3).

Diamo qui solo un cenno di itinerario didattico verso il "linguaggio" ed i suoi problemi, lavoro sempre molto complesso, se lo si vuole trattare da punti di vista diversi dal mero addestramento, ed andiamo verso le equazioni di secondo grado! Potendo affondare le radici in problematiche già trattate e apparentemente lontane, potrebbe essere l'occasione per un'affascinante costruzione del sapere! E proprio in un ricco dialogo con Carlo Felice Manara si è meglio evidenziato il legame del problema con la soluzione grafica di un'equazione di secondo grado. Si consideri la figura 4:

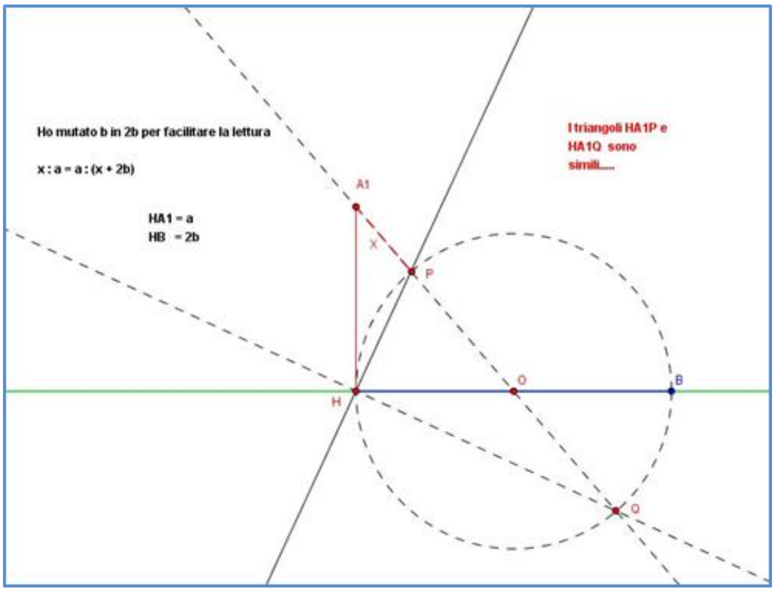

Figura 2. Costruzione di triangoli simili

La similitudine dei triangoli HA_1P *e* HA_1Q porta alle uguaglianze: $x : a = a : (x + 2b)$, da cui

$x\,(x + 2b) = a^2$, e infine $x^2 + 2b\,x = a^2$.

Infine, la costruzione del triangolo richiesto è illustrata nella seguente figura 5.

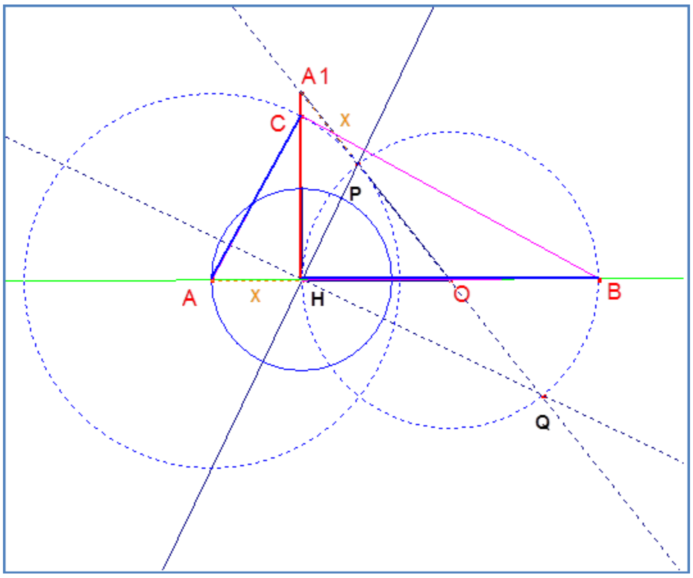

Figura 3. Il triangolo richiesto ACB.

(**) Cabrinews è una lista di discussione tematica nata nell'IRRSAE Emilia Romagna, a Bologna nel 1996, con l'obiettivo di costituire un contenitore per lo scambio di esperienze, quesiti e informazioni in merito all'utilizzo del software Cabri-Géomètre, nell'ambito di un progetto di rivalutazione dell'insegnamento della geometria in vari ordini di scuola.
Nel tempo si è trasformata in uno spazio:

- di discussione dei problemi legati all'insegnamento/apprendimento della matematica, in particolare con l'utilizzo delle tecnologie;
- di informazione/diffusione di eventi, articoli e libri riguardanti l'insegnamento della matematica.

Dal Gennaio 2010 la lista è promossa dalla Presidenza del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Ferrara.

Cabrinews

Lista di discussione sulla matematica e sul software matematico

promossa dalla Presidenza del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Ferrara

Cabrinews pubblicava anche in forma cartacea un bollettino "Cabrirrsae-Bollettino degli utilizzatori di software matematici - I.R.R.E Emilia Romagna", in cui si presentavano anche molti interessanti articoli a proposito dell'utilizzo di Cabri in momenti didattici particolarmente significativi. Ogni mese dall'I.R.R.E Emilia Romagna, (ma questo avviene ancora nel contesto attuale, così come è rimasta la lista di discussione) veniva inviato in rete un interessante problema rivolto agli studenti della scuola media e del biennio per chiedere loro di cimentarsi in una situazione non convenzionale. Nel mese successivo un rendiconto delle risposte ricevute con commenti relativamente ai percorsi risolutivi completava il suggerimento.